

连续性与间断点

笔记下载: www.sudoedu.com/cn

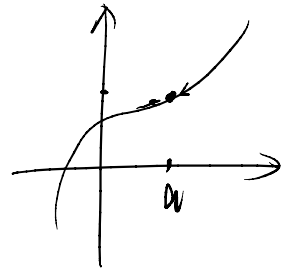
1. 连续性

定义: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

① $f(x)$ 有定义

② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在

③ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



2. 定理: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

① $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

例1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}, f(1) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Rightarrow f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续

例2. $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x < 1 \\ 4-x & x \geq 1 \end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?

解: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x^2) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4-x) = 3$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续

例3. $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & x < 0 \\ ax+b & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x & x > 2 \end{cases}$ 问 a, b 取何值时, $f(x)$ 处处连续.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2-2x+1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow b = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax+1) = 2a+1$

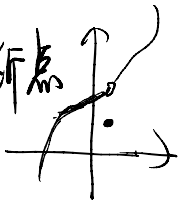
$\Rightarrow 2a+1 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4-x) = 2$$

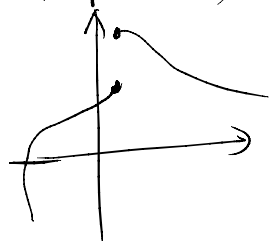
∴ 当 $a = \frac{1}{2}, b = 1$ 时, $f(x)$ 处处连续.

3. 间断点, 不连续点

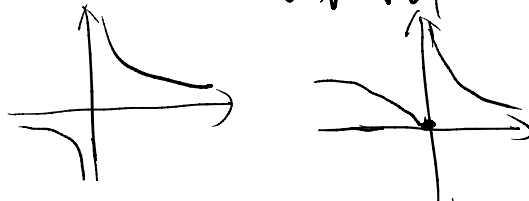
① $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 但是 $f(a)$ 没有定义或者 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \Rightarrow$ 可去间断点
 重新定义 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow$ 此时连续



② $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 都存在但不相等 \Rightarrow 跳跃间断点 (阶梯间断点)



③ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 有一个为 $\pm \infty \Rightarrow$ 无穷间断点



④ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 都不存在 \Rightarrow 振荡间断点

例4 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$, 求出所有间断点并判断其类型, 若是可去间断点, 补充定义使其连续

解: $x = \pm 2$ 间断点

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{4}$$

∴ $x = -2$ 是可去间断点 \Rightarrow 补充定义 $f(-2) = -\frac{1}{4}$
 也就是 $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4} & x \neq -2 \\ -\frac{1}{4} & x = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x = -2$ 处连续

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \begin{cases} +\infty & x \rightarrow 2^+ \\ -\infty & x \rightarrow 2^- \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 2$ 是无穷间断点

例5 $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 0 \end{cases}$

$x < 0$

求出 $f(x)$ 的间断点并判断其类型

例5. $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ 2x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & x > 1 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2$ } $\Rightarrow x=0$ 是跳跃间断点

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$$

} $\Rightarrow x=1$ 也是跳跃间断点

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$$