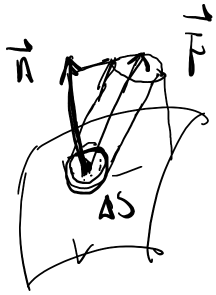
对坐标的曲面积分（向量场的曲面积分）



1. 通过曲面的流量 Φ，$|\vec{n}|=1$

速度向量 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$

$$=\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$$

$$\Delta\Phi_i \approx \vec{F}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S$$

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi_i\approx\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i \qquad \Delta S=\max\{\Delta S_i\}$$

$$\Phi=\lim_{\Delta S\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$$

$$=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

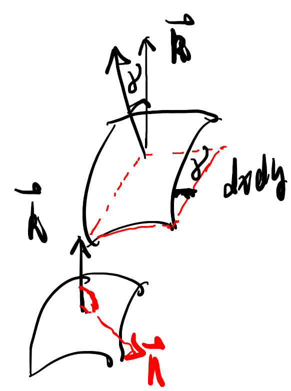
2. 向量场的曲面积分：$\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\lim_{\Delta S\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(x_i^*,y_i^*,z_i^*)\cdot\vec{n}(x_i^*,y_i^*,z_i^*)\Delta S_i$

3. 对坐标的曲面积分。

$$|\vec{n}|=1 \Rightarrow \vec{n}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)\cdot(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)\,dS$$

$$=\iint_S\big(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\big)\,dS$$



$$\cos\gamma\,dS=\begin{cases}dxdy & \cos\gamma>0 \quad 上侧\\ -dxdy & \cos\gamma<0 \quad 下侧\end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\,dS=\begin{cases}\displaystyle\iint_S R(x,y,z)\,dxdy & 上侧\\ \displaystyle-\iint_S R(x,y,z)\,dxdy & 下侧\end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha\,dS=\begin{cases}\displaystyle\iint_S P(x,y,z)\,dydz & 前侧\\ \displaystyle-\iint_S P(x,y,z)\,dydz & 后侧\end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_S Q(x,y,z)\cos\beta\, dS = \begin{cases} \iint_S Q(x,y,z)\, dx\, dz & \text{右侧} \\ -\iint_S Q(x,y,z)\, dx\, dz & \text{左侧} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_S P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dx\, dz + R(x,y,z)\, dx\, dy$$

$$= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$