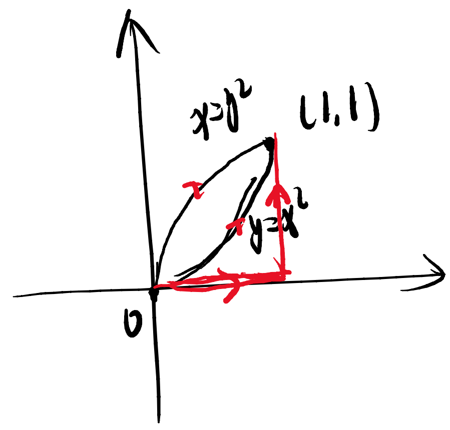
曲线积分与路径无关的条件

例1. $\int_L 2xy\,dx + x^2 dy$，沿三条不同路径积分一样

$=1$



1. 曲线积分基本定理：$\int_L \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$

2. 积分与路径无关：$\int_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 对所有起点与终点相同的曲线 L_1 和 L_2 成立。

3. 积分与路径无关的条件：

定理：在区域 D 内，以下 4 个条件等价，D 单连通。

① $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 与路径无关

② $\vec{F} = \nabla f$

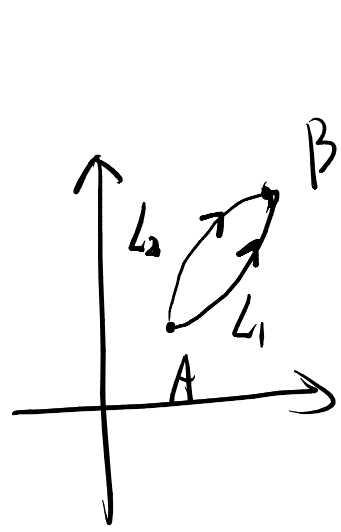
③ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ （2D，$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$）

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ （3D，$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$）

P, Q, R 一阶连续可导。

④ 沿任一闭曲线积分为 0. $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

证明：① → ④



$\int_{L_1} = \int_{L_2} \Rightarrow \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$

$\Rightarrow \int_{L_1} + \int_{-L_2} = 0$

$$\Rightarrow \oint_L = \int_{L_1 - L_2}$$

② → ①

② ⇔ ③

④ → ② 格林公式（平面上）

stoke's 公式（空间）