最大最小值问题.

1. 最大最小值可能的点：① 极值点
② 端点

2. 最大最小值问题求解步骤：① 求出极值点 ② 比较端点处的值.

特殊情况：若区间内部只有一个极值点，它一定是最值

例1. 求函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大最小值.

解：① $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0,1$

② $f''(x)=12x-6$  $f''(0)=-6 \Rightarrow f(0)=0$ 是极大值

$f''(1)=6 \Rightarrow f(1)=-1$ 是极小值.

③ $f(-1)=2\cdot(-1)-3\cdot1=-5$

$f(4)=2\cdot64-3\cdot16=128-48=80$

$\Rightarrow f(-1)=-5$ 是最小值, $f(4)=80$ 是最大值.

例2. 求与点 $(1,4)$ 最近的位于 $y^2=2x$ 上的点.

解：$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$, $y^2=2x$

$=\sqrt{(\frac{1}{2}y^2-1)^2+(y-4)^2}$

$d^2=(\frac{1}{2}y^2-1)^2+(y-4)^2$  $\Rightarrow f(y)=(\frac{1}{2}y^2-1)^2+(y-4)^2$

$\Rightarrow f'(y)=2(\frac{1}{2}y^2-1)\cdot y+2(y-4)$

$=y^3-2y+2y-8$  $\Rightarrow y=2$

$=y^3-8=0$

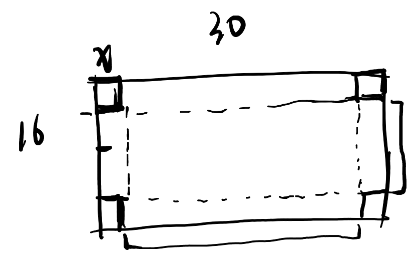
$\Rightarrow f''(y)=3y^2$

$f''(2)=12<0$  $\Rightarrow f(2)=1+4=5$ 是极小值.

$d=\sqrt{5}$ 是最短距离.

这个点为 $(2,2)$

例3. 用一张长30cm，宽16cm的纸盒做一个无盖纸盒，问长、宽各是多少，盒子的体积最大。




解：$V=(30-2x)(16-2x)\cdot x$　　　$0\le x\le 8$

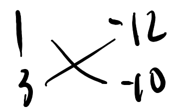
$= x(480-92x+4x^2)$

$= 4x^3-92x^2+480x$

$\Rightarrow V' = 12x^2-184x+480$

$= 4(3x^2-46x+120)$

$= 4(x-12)(3x-10)$




$V'=0 \Rightarrow x=12$ (舍去)，$x=\frac{10}{3}$

$\Rightarrow V''=24x-184$　　$V''(\frac{10}{3})<0 \Rightarrow V(\frac{10}{3})$ 是最大值.

$\Rightarrow$ 长为 $30-\frac{20}{3}=\frac{70}{3}$，宽为 $16-\frac{20}{3}=\frac{28}{3}$ 体积最大.