泊松分布

1、泊松分布：$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$　　$k=0,1,2,\cdots$　　$X\sim P(\lambda)$

例1、设一本书中每页印刷的错误数服从参数 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的泊松分布，今取一页，求该页中至少有一处错误的概率。

解：X：错误数

$$P\{X\geq 1\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{0.5^0\cdot e^{-\frac{1}{2}}}{0!}=1-e^{-0.5}$$

2、定理（用泊松分布逼近二项式分布）设 $\lambda>0$ 是一个常数，n 是任意正整数，设 $np_n=\lambda$，则对任一固定正整数 k，有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

证明：

$$\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

例2、假设某个机械里某种零件失效的概率为 0.001，取 100 件这样的零件，问最多有一件失效的概率。

解：（n 很大，p 很小）$\Rightarrow\lambda=np=100\cdot 0.001=0.1$

$$P\{X \le 1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\}$$
$$= \frac{0.1^0}{0!} \cdot e^{-0.1} + \frac{0.1}{1!} e^{-0.1}$$
$$= e^{-0.1} + 0.1 \cdot e^{-0.1} = 1.1 e^{-0.1}$$

二项分布：
$$P\{X \le 1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\}$$
$$= 0.999^{100} + \binom{100}{1} 0.001 \cdot 0.999^{99}$$
$$= 0.999^{100} + 0.1 \cdot 0.999^{99}$$
$$= 0.999^{99}(0.999 + 0.1)$$
$$= 1.099 \cdot 0.999^{99}$$