

独立性:

1. 一事件的发生不影响另一个事件发生的概率.

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A|B) = P(A)$$

$$2. \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot \underline{P(B|A)} \quad [P(B|A) = P(B)]$$

$$= \underline{P(A) P(B)}$$

3 定义: A与B独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

例1. 袋中有6个红球, 4个白球, 设A: "第一次取到白球", B: "第二次取到白球"
分别放回和不放回抽取2次. 求 $P(B)$.

解: ① 放回: $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$P(AB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \quad P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{2}{5} \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 独立.}$$

② 不放回: $P(B) = P(\underline{A}B) + P(\bar{A}B)$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{6}{45} + \frac{12}{45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{2}{5}, \quad P(AB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow P(AB) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 不独立.}$$

例2. 从52张扑克牌里(去掉大小王)取一张, 设A: "取到黑桃", B: "取到K"

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{13}, \quad P(AB) = \frac{1}{52}$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$$

$$\Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 独立.}$$

4. 三个事件独立:

$$A, B, C \text{ 独立} \Leftrightarrow P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$A_1, \dots, A_n \text{ 独立} \Leftrightarrow P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

5. 定理: A 独立 $\Rightarrow A$ 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} 也独立.

证明: A 与 B 独立 $\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$$\Rightarrow P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

$$= P(A) \cdot P(B) + P(A\bar{B})$$

$$\left(\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) \\ &= AB \cup A\bar{B} \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(A) (1 - P(B))$$

$$= P(A) \cdot P(\bar{B})$$

$$\Rightarrow A \text{ 与 } \bar{B} \text{ 独立.}$$