矩阵可逆的条件

定理：下列条件是等价的.

① A 可逆.

② $|A| \neq 0$

③ $A \sim I_n$

④ $R(A) = n$

⑤ $A\vec{x} = 0$ 只有零解（平凡解）

⑥ $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解

⑦ 存在矩阵 B，使得 $AB = I$

⑧ 存在矩阵 C，使得 $CA = I$

⑨ A^T 可逆.

例1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 问 A 是否可逆?

解：① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -14 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R(A)=2<3$

$\Rightarrow$ A 不可逆.

② $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -14 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ A 不可逆.

例2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 问 A 是否可逆?

解：① $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ A 可逆

② $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 9 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 9\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 9\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=3 \Rightarrow A\text{可逆}$$