# 行列式的性质与计算

## 1. 行列式的定义：(递归法)

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}C_{11} - a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}A_{1i}$$

$A_{1i} = (-1)^{1+i}C_{1i}$，$C_{1i}$ 为 $A$ 划去第一行第 $i$ 列后得到的行列式

$C_{ij}$：$A$ 的余子式，$A_{ij} = (-1)^{i+j}C_{ij}$ 代数余子式

$$|A_4| = \sum_{i=1}^{4} a_{1i}A_{1i} \qquad |A|_n = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i}C_{1i}$$

## 2. 行列式性质：

① 行列式可以按一行或任一列展开。

② 某一行的公因式可提到行列式外面

③ 将行列式的两行(列)交换，行列式变号

④ 将一行加上另一行的倍数，行列式不变

初等变换

⑤ $|A| = |A^T|$

⑥ 两行成比例，行列式为0

⑦ 某一行全为0，行列式为0

⑧ 某一行元素乘以另一行对应元素的代数余子式，其和为0

## 3. 行列式计算：(降阶法)

降阶法：初等变换 + 展开

例1. 计算

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

例2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} a-b & & \\ & \ddots & \\ & & a-b \end{vmatrix}_{n-1} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$