笔记下载：www.sudoedu.com

一些初等函数的泰勒级数、

1. 定理：设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内一点，则 $f(z)$ 在 D 内可展开成 z_0 的泰勒级数。

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad |z-z_0|<R$$

R：z_0 到 D 的边界的最短距离，称 R 为收敛半径

$z_0=0 \Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ 麦克劳林 (Maclaurin) 级数、

例1. $f(z)=e^z$，$f^{(n)}(z)=e^z$. $f(0)=1$. $f^{(n)}(0)=1$.

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad |z|<\infty \quad \because e^z \text{在 } \mathbb{C} \text{ 解析}$$

$$=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

例2. $f(z)=\sin z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析、 $f'(z)=\cos z$，$f''(z)=-\sin z$，$f'''(z)=-\cos z$

$f^{(4)}(z)=\sin z$，……，$f^{(2n)}(z)=(-1)^n\sin z$，$f^{(2n+1)}(z)=(-1)^n\cos z$

$\Rightarrow f^{(2n)}(0)=0$，$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$

$$\Rightarrow \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$(|z|<R)$

例3. $f(z)=\cos z$. 在 $\mathbb{C}$ 上解析、 $f'(z)=-\sin z$，$f''(z)=-\cos z$，$f'''(z)=\sin z$

$f^{(4)}(z)=\cos z$，$f^{(2n+1)}(z)=(-1)^{n+1}\sin z$

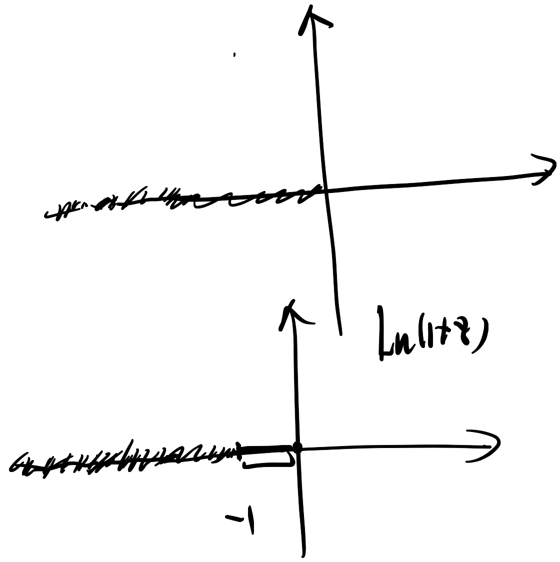
$f^{(2n)}(z)=(-1)^n\cos z$

$\Rightarrow f^{(2n+1)}(0)=0$，$f^{(2n)}(0)=(-1)^n$

$$\Rightarrow \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$$

例4. $Ln(1+z)$ 在 $z=-1$ 处不解析



$$f'(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}$$

$$f'''(z) = \frac{(-1)(-2)}{(1+z)^3} = \frac{(-1)^2\, 1\cdot 2}{(1+z)^3}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+z)^{n+1}}$$

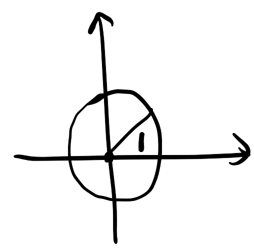
$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{1} = (-1)^n \cdot (n-1)!$$

$$\Rightarrow Ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}$$

$Ln 1 = 0$ $\qquad |z| < 1$

例5. $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$



变量代换:

例6. $$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

例7. $$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

例8. $f(z) = \frac{1}{z}$ 在 $z=1$ 处的泰勒级数

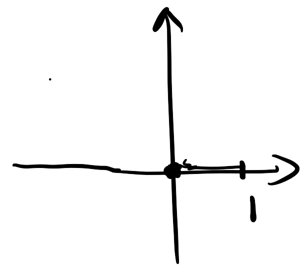
解: $$f'(z) = \frac{-1}{z^2}, \quad f''(z) = \frac{(-1)(-2)}{z^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{z^3}, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$$= 1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots \qquad |z-1|<1$$

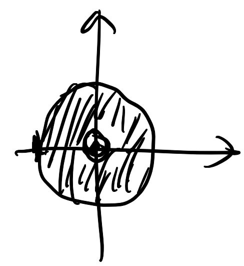
例9. $f(z) = \dfrac{1+2z}{z^2+z^3}$



解: $$\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1+2z}{1+z}\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{2+2z-1}{1+z}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(2-\frac{1}{1+z}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(2-\left(1-z+z^2-z^3+z^4+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots\right)\right)$$



$$= \frac{1}{z^2}\left(1+z-z^2+z^3+\cdots+(-1)^{n+1}z^n+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot z^{n-2}+\cdots \qquad 0<|z|<1$$