罗朗(Laurent)级数

1. 定理：设 $f(z)$ 在圆环 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{解析部分}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}}_{\text{主要部分}}$$

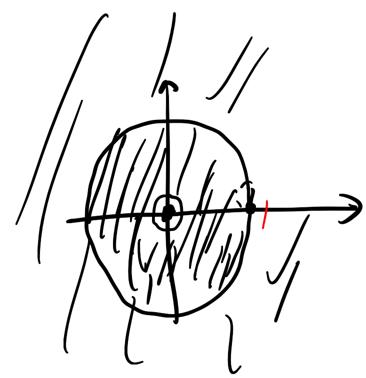
其中：$C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds$ ， $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds$， $b_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L (s-z_0)^{n-1}f(s)ds$ $n=0,1,2,\cdots$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{-n+1}}$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds$$

例1. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$，罗朗级数



解：$f(z)$ 在 $z=0$，$z=1$ 不解析，但是在 $0<|z|<1$，

$1<|z|<\infty$ 解析

① $0<|z|<1$，$(z_0=0)$

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z} \Rightarrow A(1-z)+Bz=1$$

$$\Rightarrow B=1,\ A=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z} \qquad (z-z_0)^n$$

$$=z^{-1}+(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)$$

$$=\frac{1}{z}+1+z+\cdots+z^n+\cdots \qquad 0<|z|<1$$

② $1<|z|<\infty$

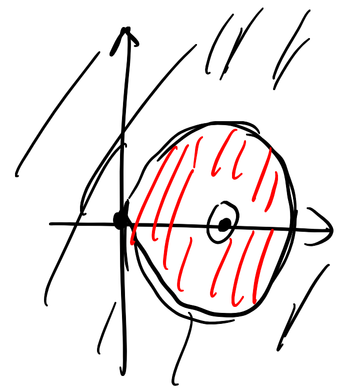
$$\Rightarrow \frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1} \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{z}\right)^n + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \cdots - \frac{1}{z^{n+1}} - \cdots$$

$$= -\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^{n+1}} + \cdots\right)$$



③ $0 < |z-1| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$$

$$= \frac{1}{1+(z-1)} - \frac{1}{z-1}$$

$$= \left(1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots + (-1)^n (z-1)^n + \cdots\right) - \frac{1}{z-1}$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

④ $1 < |z-1| < \infty$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-1)} - \frac{1}{z-1} \qquad 1 < |z-1| < \infty$$

$$= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}} - \frac{1}{z-1}$$

$$= \frac{1}{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-1}\right)^n\right) - \frac{1}{z-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}} - \frac{1}{z-1}$$

例2. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n} + \cdots$ $\quad 0<|z|<\infty$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

例3. $\sin\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n}} + \cdots$

例4. $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$ $\quad 0<|z|<\infty$ 解析、

$$= z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots\right)$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!z^{n-3}} + \cdots$$