零点的个数，辐角原理

1. 定理（零点的个数）：设 $f(z)$ 在闭曲线 Γ 上解析，在 Γ 内部除了 N 个极点外解析，在 Γ 上 $f(z)\neq 0$，而在 Γ 内部有 M 个零点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = M-N$$

其中极点或零点有 n 级算 n 个。

证明：① 设 $z=a$ 为 m 重零点，$f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，$\varphi(a)\neq 0$，$\varphi(z)$ 在 a 附近解析。

$$\Rightarrow f'(z)=m(z-a)^{m-1}\varphi(z)+(z-a)^m\cdot\varphi'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\Big(\underbrace{\frac{m}{z-a}}_{m}+\underbrace{\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}}_{=0}\Big)dz$$

$$= m$$

② 设 $z=b$ 为 n 级极点，则 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-b)^n}$，$\varphi(z)$ 在 b 附近解析。

$$f'(z)=\frac{-n\,\varphi(z)}{(z-b)^{n+1}}+\frac{\varphi'(z)}{(z-b)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-b|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-b|=\rho}\Big(\frac{-n}{z-b}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\Big)dz$$

$$= -n$$

③ 复连通区域上的柯西积分定理

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum m_j-\sum n_k = M-N$$

2、辐角原理：

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=[\mathrm{Ln}\,f(z)]'=[\ln|f(z)|+i\,\mathrm{Arg}\,f(z)]'$$

$$=\frac{d}{dz}\ln|f(z)|+i\frac{d}{dz}\mathrm{Arg}\,f(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{d\ln|f(z)|}{dz}dz+\frac{1}{2\pi}\underbrace{\oint_{\Gamma}d(\mathrm{Arg}\,f(z))}_{\text{辐角变化}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \ln|f(z)| \Big|_{z_0}^{z_0} + \underline{\frac{1}{2\pi}\int_P d(\mathrm{Arg}\, f(z))}$$

若记 $\underline{\Delta_P \mathrm{Arg}\, f(z) = \int_P d\, \mathrm{Arg}\, f(z)}$ 为辐角变化（2π倍数）

$$\Rightarrow \underline{M} - \underline{N} = \frac{1}{2\pi} \Delta_P \mathrm{Arg}\, f(z)$$