调和函数的平均值定理、极值原理.

1. 解析函数的平均值定理：$f(z)$ 在 D 内解析，$|z-z_0|<r \subset D$.

$$\Rightarrow f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad z-z_0=re^{i\theta},\ dz=ire^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$\Rightarrow$ $f(z)$ 在 z_0 处的值等于 $f(z)$ 在 $|z-z_0|=r$ 的值的平均.

2. 调和函数的平均值定理：$u(x,y)=u(z)$ 是调和函数，$v(z)$ 是 u 的共轭调和函数

$$\Rightarrow u(z_0)+iv(z_0)=f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(z_0+re^{i\theta})+iv(z_0+re^{i\theta})]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta+i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$\Rightarrow u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

3. 最大模原理：$f(z)$ 在 D 内解析，若 $z_0\in D$，使得 $\forall z\in D$，$|f(z_0)|\geq|f(z)|$

$\Rightarrow$ $f(z)$ 在 D 内是常数.

也就是说：若解析函数在区域内部取到最大模，则它一定是常数.

（不为常数的解析函数，最大模只能在区域边界取到）

4. 极值原理：设 $u(z)$ 在区域 D 内是调和函数，且不恒等于常数，则 u 在 D 内部不能达到最大值和最小值.

证明：只需要证明最大值的情形，因为 u 的最小值就是 $-u$ 的最大值.

用反证法. 假设 $u(z)$ 在 $z_0\in D$ 取到最大值，在 D 内作 u 的共轭调和函数 $v(z)$，记 $f(z)=u(z)+iv(z)$

$\Rightarrow \underline{\left|e^{f(z)}\right|} = e^{u(z)}$, $e^{f(z)}$ 是解析函数.

$e^{u(z)} = \left|e^{f(z)}\right|$ 与 $u(z)$ 在同一点达到最大值.

$\Rightarrow$ 最大值原理: $e^{f(z)}$ 是常数. $\Rightarrow$ $\underline{f(z)\text{ 是常数}}$

$\Rightarrow$ $u(z)$ 在 D 内是常数. $\Rightarrow$ 矛盾.

5. 极值原理: 除非 $u(z)$ 恒等于常数, 否则其最大值不可能在内部取到.

(最大值只能在边界取到)